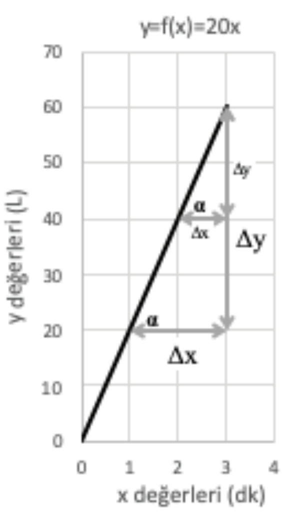
Türeve Giriş

Hakan Albayrak

Aralarındaki matematiksel ilişkiyi bir fonksiyon ile sağladığımız bağımsız değişken x ile ona bağımlı değişken y için türev, bu fonksiyonun bağımsız değişkeni x'in değişimi ve buna bağlı değişken y'nin yani f(x)'in değişimi ile ilgilidir. Konuya doğrudan girmeden önce doğrusal fonksiyonlarda (genel ifadesi y=f(x)= m.x + b) x'in değişimi sonucu y'nin değişimini incelemekle başlayalım, daha sonra doğrusal olmayan fonksiyonlar için bir örnek ele alıp bu değişimleri inceleyelim.

Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Fonksiyonlarda Değişimlerin Oranı:

Genel ifadesi y=f(x)= m.x + b olan doğrusal fonksiyona bir örnek olarak, y=f(x)=20x'i ele alalım. Örnek olması bakımından, y=f(x) bir musluktan akan suyla dolan havuzda bulunan su miktarını litre (L) cinsinden temsil etsin. x bağımsız değişkeni de açıldığı andan itibaren dakika cinsinden anları temsil etsin. Şu durumda havuzda 1. dakikada f(1)=20.1=20 L, 2. dakikada f(2)=20.2=40 L, 3. dakikada f(3)=20.3=60 L, 4. dakikada … olmak üzere su bulunmuş olur. Farklı zaman aralıklarına bakarak (örneğin 2. dakika ve 3. dakika ya da 1. dakika ve 3. dakika arasında) dakikada kaç litre su aktığını hesaplamak istersek bunu nasıl hesaplarız? Cevap basittir: Geçen sürede kaç litre su aktığını bulup, geçen süreye oranlarız. Örneğin 2. dakika ve 3. dakika (dk) arasında $\Delta x = x_{son} - x_{ilk} = 3 - 2 = 1$ dk ve $\Delta y = y_{son} - y_{ilk} = 60 – 40 = 20$ L olur. Son olarak $\Delta y / \Delta x = 20 / 1 = 20$ L / dk olarak hesaplarız. Bu sonuç farklı zaman aralıklarında da böyle midir? 1. dakika ve 3. dakika arası için de aynı hesabı yaparsak $\Delta x = x_{son} - x_{ilk} = 3 – 1 = 2$ dk ve $\Delta y = y_{son} - y_{ilk} = 60 – 20 = 40$ L, buradan $\Delta y / \Delta x = 40 / 2 = 20$ L/ dk olarak hesaplanır. Görüldüğü gibi sonuç her iki durumda da eşittir. Burada bir dakikada akan suyu hesaplarken, biri x'e (an'a) bağımlı değişken olan y'nin (havuzdaki su miktarı), diğeri bağımsız değişken olan x'in, değişimlerinin oranını hesaplamış oluyoruz. Doğrusal fonksiyonlar için Δx aralığını ister küçük tutun, ister büyük tutun Δy / Δx oranı sabit olacaktır.



Şekil 1. y=f(x)=20x grafiği. Δy'ler ve Δx'ler gri, uçları okla belirtilmiş uzunluklar. Δy'ler, küçük punto ile yazılmış olanı $y_{son} - y_{ilk} = 60 – 40 = 20$ ve büyük punto ile yazılmış olanı $y_{son} - y_{ilk} = 60 – 20 = 40$; Δx'ler, küçük punto ile yazılmış olanı $x_{son} - x_{ilk} = 3 - 2 = 1$ ve büyük punto ile yazılmış olanı $x_{son} - x_{ilk} = 3 - 1 = 2$ (y değerleri litre (L), x değerleri dakika (dk) cinsinden)

Geometrik olarak değerlendirildiğinde de y= f(x) = 20x fonksiyonunun grafiğinin bir doğru (Şekil 1'de grafikteki doğru (siyah)) olduğu ve Δy / Δx oranlarının da bu doğrunun eğimi olduğu görülür. Yukarıda hesaplanan Δy'ler ve Δx'ler grafikte görünmektedir. Doğru için hesaplanan eğimler de Δx'lerin y=20x doğrusu ile yaptığı α (alfa) açılarının tanjantlarına (tan α) eşittir. Δx'ler birbirine paralel olduklarından α açıları da birbirine eşittir.

Yukarıdaki grafikte doğruyu istediğimiz kadar uzatalım ya da kısaltalım, doğrunun yatayla (yani Δx doğru parçası ya da x ekseni) yaptığı açı (α) değişmeyecektir, dolayısıyla bu açının tanjantı da değişmeyecektir, tan α = (Δy / Δx) olacağından, 1 dakikada havuza akacak olan su miktarı her zaman 20 L olarak kalacaktır, yani sabittir.

Doğrusal fonksiyonlarla ilgili olarak;

1- Genel matematiksel formu y = f(x) = m.x + b'dir.

2- Geometrik olarak değerlendirildiğinde, y=f(x)'in grafiğinin bir "doğru" olduğu görülür.

3- Bu fonksiyonun grafiği olan doğrunun eğimi, x'in önündeki katsayı m'dir.

4- Bu eğim, grafikte doğrunun, yatayla ve dikeyle oluşturduğu dik üçgende, doğrunun yatayla yaptığı açının (yukarıdaki grafikte α açısının) tanjantına eşittir (m = tan α). tan α da y ve x değişkenlerinin değişimlerinin oranına eşittir (Δy / Δx = tan α)

5- Doğrusal fonksiyonlar için bu değişimlerin oranı, diğer bir deyişle doğrunun eğimi sabittir. Değişimler (Δy ve Δx) değişse de Δy / Δx oranı değişmez, grafikte α değişmez, dolayısıyla tan α da değişmez.

Şimdi şu soruyu sorabiliriz: Değişimlerin oranı her fonksiyon için sabit midir?

Yukarıdaki örnek üzerinden gitmeye devam edelim ve iki durum düşünelim: musluktan eşit zaman aralıklarında, örneğin 1. ile 2. dakika anları arasında kalan sürede (yani 1 dakika) akan suyla, 2. ile 3. dakika anları arasında kalan sürede (yani bir başka 1 dakika) akan su miktarları farklı olsa, her iki durum için dakikada akan su miktarları (Δy / Δx) eşit olur mu? (Bu soruya aşağıdaki satıra bakmadan kendiniz cevap vermeye çalışın.)

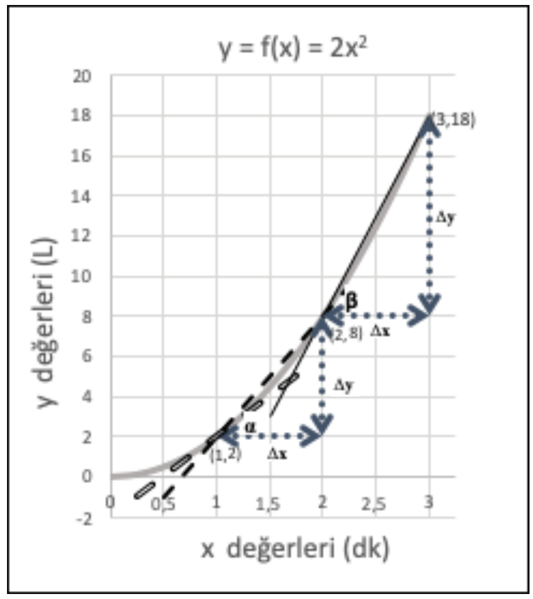
Cevap: Δx'ler eşit (yani 1 dakika) ama Δy'ler farklı olduğundan Δy/Δx oranı eşit olmayacaktır. Böyle bir farklılık doğrusal fonksiyonlarla ifade edilemez. Çünkü doğrusal fonksiyonlarda Δy/Δx oranı sabittir. Değişimlerin oranının sabit olmadığı bu durumu, örneğin bir kuvvet fonksiyonu ile ifade edebiliriz. Benzer incelemeyi doğrusal olmayan fonksiyona örnek olarak bir kuvvet fonksiyonu seçerek yapalım. Bu sefer farklı bir musluğun doldurduğu havuzda grafiği şekil 2'de verilen $y=f(x)=2x^2$ kuvvet fonksiyonuna göre su bulunsun. Yani 1. dakikada $y = f(1)=2.(1)^2 = 2$ L, 2. dakikada $y=f(2)=2.(2)^2 = 8$ L, 3. dakikada $y= f(3)=2.(3)^2 = 18$ L havuzda su bulunsun. Değişimlerin oranlarına doğrusal fonksiyon örneğindeki gibi bu kez 1. dk - 2. dk ve de 2. dk - 3. dk arası için bakalım.

İlk durum için $\Delta y / \Delta x = (y_{son} - y_{ilk}) / (x_{son} - x_{ilk}) = (f(2) - f(1)) / (2\text{-}1) = (8 – 2) / 1 = 6$ L/dk, ikinci durum için ise $\Delta y / \Delta x = (y_{son} - y_{ilk}) / (x_{son} - x_{ilk}) = (f(3) - f(2)) / (3\text{-}2) = (18 – 8) / 1=10$ L/dk olarak hesaplanır. Bu iki durumdan görülebileceği gibi eşit zaman aralığı içinde (burada 1 dakika) musluktan eşit miktarda su akmamıştır. O halde bu örnekte değişimlerin oranları farklı hesaplanmaktadır.

Δx'i 1 dk'nın altına indirip yine birim zamanda akan su miktarını hesapladığımızda da yine Δy /Δx 'i farklı değerlerde buluruz. Örneğin 1-1,5 dk aralığına bakalım: $\Delta y / \Delta x = (y_{son} - y_{ilk}) / (x_{son} - x_{ilk}) = (f(1{,}5) - f(1)) / (1{,}5\text{-}1) = (4{,}5 – 2) / 0{,}5 = 5$ L/dk olarak hesaplanır. O halde bu aşamada şu soruları sorabiliriz: "Birim zamanda musluktan ne kadar su akmaktadır?" sorusunun cevabı bulduğumuz cevaplardan hangisidir? Neden farklı farklıdır? Hepsi mi doğrudur? Yoksa hepsi yanlış mıdır?

Elbette Δy /Δx oranı, burada birim zamanda akan suyu hesaplamamızın başlangıç noktasıdır. Seçilen x_{son} ve x_{ilk} değerlerine göre y_{son} ve y_{ilk} değerleri farklılaşır, doğrusal fonksiyonlarda da bu böyleydi. Doğrusal fonksiyonlarda eşit Δx'li durumlar için Δy'ler de eşittir, bu yüzden Δy /Δx oranları değişmez. Fakat burada farklılık, seçtiğimiz Δx'ler eşit olsa da Δy'lerin farklı olmasındandır. Buna bağlı olarak ta Δy/Δx oranları farklı hesaplanmaktadır. Δy /Δx oranına Δx'ler daha da küçültülerek bakıldığında, bu oranın yine farklılaşmaya devam ettiği hesaplanır. Δx'in sıfıra yaklaşması, zaman aralığından x_{ilk} anının kendisine yaklaşmamız anlamına gelir ki; bu durum bize şunu düşündürür: Musluktan birim zamanda akan su, seçilen zaman aralıklarına göre değişkenlik göstermektedir, dolayısıyla bu aşamadan sonra birim zamanda akan su miktarından anlık olarak bahsetmek gerekir. Yani Δx sıfıra giderken (Δx'in sıfıra gitmesi $\Delta x \rightarrow 0$ ile gösterilir.) Δy /Δx oranına bakılır ve birim zamanda akan su miktarı anlık olarak hesaplanır. Yani musluktan akan su miktarı, anlık olarak değişmektedir ve an'a bağımlıdır. Bu aşamadan sonra Δy /Δx oranı $\Delta x \rightarrow 0$ limit durumda hesaplanır. İşte bağımsız değişkene bağlı değişim Δx sıfıra giderken (yani $\Delta x \rightarrow 0$), Δy /Δx ile ifade edilen değişimlerin oranına "türev" adını veriyoruz.

Matematiksel ifadeyle türev, limit $\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ ile hesaplanır ve türevin bir diğer ifadesinde Δy ve Δx'teki Grek alfabesinden gelen ve fark anlamı taşıyan Δ, yerini "d" harfine bırakır. Bir bağımlı değişkenin (burada y) bağımlı olduğu bağımsız değişkene (burada x'e) göre türevi $\frac{dy}{dx}$ ile ifade edilir ve $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 'tir. Buradaki "d" harfi diferansiyeli temsil eder ve diferansiyel "sonsuz küçük değişim" anlamı taşır. Yani $\Delta x \rightarrow 0$ durumunda Δx, dx adını alır ve x'e göre değişen y için de Δy, dy adını alır. Yani türev sonsuz küçük değişimlerin oranıdır (dy/dx).



Şekil 2. $y = f(x) = 2x^2$ fonksiyonunun grafiği. (1,2) noktasından geçen teğet (kesikli dolgusuz çizgi), (1,2) ve (2,8) noktalarından geçen doğru parçası (kesikli dolgulu çizgi), (2,8) ve (3,18) noktalarından geçen doğru parçası (düz çizgi), bu nokta çiftlerini birleştiren doğru parçalarından her birinin hipotenüs, Δx ve Δy'lerin (bitiş ve başlangıçları okla belirtilmiş, kesikli noktalardan oluşan doğru parçalarının) dik kenarlar olduğu dik üçgenlerde α ve β açıları gösterilmiştir. α ve β açıları farklı değerlerdedir.

Şekil 2'de $y=f(x)=2x^2$ fonksiyonunun grafiği bulunmaktadır. Bu bir doğrusal fonksiyon olmadığı için grafik bir doğru değildir. Bu bir "eğridir" (gri). Yukarıda çeşitli x ve y'ler için hesapladığımız Δy/Δx oranları, geometrik olarak bakıldığında, eğri üzerinde bu x ve y'lere karşılık gelen noktalardan (yani (x_{ilk},y_{ilk}) ve (x_{son},y_{son}) noktalarından) geçen doğru parçalarının eğimleridir. Eğri üzerinde seçilen iki nokta için (yani (x_{ilk},y_{ilk}) ve (x_{son},y_{son})) Δx 0'a yaklaştıkça (yani x_{son} x_{ilk}'e yaklaştıkça) bu iki noktadan geçen doğru parçasının gittikçe eğrinin üzerindeki (x_{ilk},y_{ilk}) noktasından geçen teğete yaklaştığı izlenir. Bir diğer deyişle $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ türevi, eğrinin üzerinde belirlenen bir (x,y) noktasından geçen teğetin eğimini verir.

Şekil 2'deki grafikte eğri üzerinde $(x_{ilk},y_{ilk}) = (1,2)$ ve $(x_{son},y_{son}) = (2,8)$ noktalarından geçen doğru parçası (kesikli dolgulu çizgi), $\Delta x \rightarrow 0$ (x değerleri, $x_{son} = 2$'den $x_{ilk} = 1$'e yaklaşırken, Δx 0'a yaklaşır.) durumunda gitgide, eğri üzerinde $(x_{ilk},y_{ilk}) = (1,2)$ noktasından geçen *teğete* (kesikli dolgusuz çizgiye) yaklaşır.

Yukarıda farklı farklı değerlerle hesapladığımız Δy/Δx oranları ne anlama gelir? Onlar da belirlediğimiz Δx aralıkları için musluktan birim zamanda akan ortalama su miktarlarıdır.